4.4.3 Definiční obor funkce

Předpoklady: 040402

Všechny funkce není možné zadat předpisem $\Rightarrow$ využívají se i jiné způsoby - například tabulka.

Př. 1: Urči pro funkci $f(x)$ v tabulce:

a) $f(-1)$, $f(\sqrt{5})$, $f(3)$

b) hodnoty *x*, pro které platí: $f(x)=\frac{1}{2}$, $f(x)=2$, $f(x)=\sqrt{5}$

c) $D(f)$

d) obor hodnot $H(f)$

x	$-\sqrt{5}$	-2	-1	0	$\sqrt{5}$	4	12
y	7	π	$\sqrt{5}$	0,5	0	2	-51

a) $f(-1)=\sqrt{5}$, $f(\sqrt{5})=0$, $f(3)$ neexistuje

b) hodnoty *x*, pro které platí: $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(4)=2$, $f(-1)=\sqrt{5}$

c) $D(f)=\{-\sqrt{5};-2;-1;\sqrt{5};4;12\}$

d) obor hodnot $H(f)=\{-51;0;0,5;2;\sqrt{5};\pi;7\}$

Př. 2: Jaká omezení má zadání funkce pomocí tabulky? Jaké má tabulka přednosti?

Omezeni: nemůžeme funkce s nekonečným definičním oborem, menší přehlednost, u mnoha hodnot obtížná orientace.

Přednosti: můžeme zadat i funkci, ve které nejsou hodnoty *x* a *y* svázány logickým vztahem.

Př. 3: Zapiš tabulkou funkci, pro kterou platí: $D(f)=\{-3;1;4;5\}$, $H(f)=\{0;1;2\}$.

$D(f)=\{-3;1;4;5\}$ $H(f)=\{0;1;2\}$

x	-3	1	4	5
y	0	1	2	0

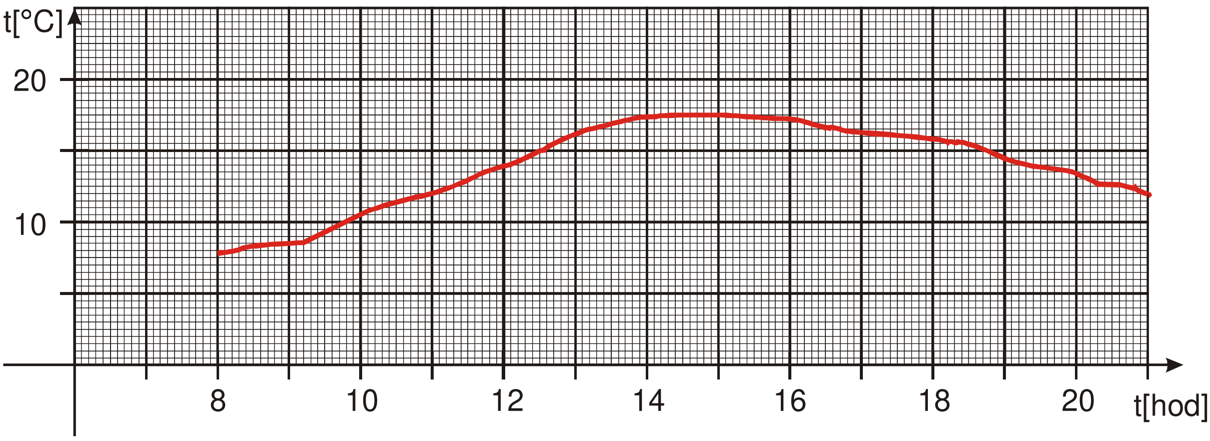
Pedagogická poznámka: Uvedené řešení není jediné. Správným řešením je každá tabulka, která má v první řádce všechna čísla uvedená v definičním oboru a v druhém všechna čísla z oboru hodnot, jedno z nich uvedené dvakrát. Na tom, jak jsou k sobě čísla přiřazena, nezáleží.

Př. 4: Olda si popletl význam definičního oboru a oboru hodnot a vytvořil následující tabulku. Jde o funkci?

x	0	1	2	0
y	-3	1	4	5

Nejde o funkci. Číslu 0 jsou přiřazeny dvě různé hodnoty $\Rightarrow$ přiřazení není jednoznačné.

Př. 5: Na obrázku je termograf - grafické zachycení změn teploty v průběhu dne.
a) Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.
b) Urči $f(8)$, $f(13,5)$, $f(20,9)$, $f(22)$.
c) V které hodině se teplota rovnala $9°C$, $15°C$, $13,5°C$?
d) Urči $D(f)$ a $H(f)$.
e) Kdy byla funkce rostoucí a kdy klesající?
f) V kterém období byla teplota vyšší než $14°C$?



a) Urči veličiny, které představují nezávisle a závisle proměnou.
Nezávisle proměnná: čas.
Závislá proměnná: teplota.

b) $f(8) = 7,8°C$ $\quad$ $f(13,5) = 16,8°C$ $\quad$ $f(20,9) == 11,9°C$

$f(22)$ - neexistuje (graf pro tuto hodnotu času není nakreslený).

c) $t = 9°C$ v čase 9,35 h. $\quad$ $15°C$ v čase 12,55 h a 18,73 h.
$13,5°C$ v čase 11,3 h a 20,7 h.

d) Urči $D(f)$ a $H(f)$.

$D(f) = \langle 8; 21 \rangle$ $\quad$ $H(f) = \langle 7,8; 17,5 \rangle$

e) Funkce byla rostoucí od 8 h do 14,7 h, klesající od 14,7 h do 21 h.

f) Teplota byla vyšší než 14°C od 12,1 h do 19,3 h.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu není problém v samotném určování hodnot, ale v jeho přesnosti. Žáci vědí, kde mají hledat, ale s přepočítáváním čtverečků a přesným odečítáním mají problémy.

Př. 6: Jaká omezení má zadání funkce pomocí grafu? Jaké má graf přednosti?

Přednosti: názornost, celkový pohled.

Omezení: nejde zobrazit funkce, jejichž definiční obor jde k nekonečnu, odečítání hodnot je pouze přibližné.

Vrátíme se k definičnímu oboru. Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.

Př. 7: Urči definiční obor funkce.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = x^2$ d) $y = \sqrt{x}$

a) $y = 2x - 1$
Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly $\Rightarrow$ $D(f) = R$.

b) $y = \frac{1}{x}$
Předpis obsahuje dělení (nesmíme dělit nulou) $\Rightarrow$ výraz ve jmenovateli musí být různý od nuly $\Rightarrow$ $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $D(f) = R - \{0\}$.

c) $y = x^2$
Předpis neobsahuje žádnou operaci, která se nedá provádět se všemi čísly $\Rightarrow$ $D(f) = R$.

d) $y = \sqrt{x}$
Předpis obsahuje odmocninu (neumíme odmocňovat záporná čísla) $\Rightarrow$ výraz pod odmocninou nesmí být záporný $\Rightarrow$ $x \geq 0$ $\Rightarrow$ $D(f) = \langle 0; \infty)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad neřešíme příliš dlouho, jde spíš o opakování vlastností operací. Zajímavé to začne být u dalšího příkladu.

Př. 8: Urči definiční obor funkce.

a) $y = \frac{1}{x+1}$ b) $y = \frac{1}{2x-3}$ c) $y = \frac{1}{x^2+1}$ d) $y = \frac{1}{x^2-1}$

Všechny funkce obsahují dělení $\Rightarrow$ hlídáme, aby ve jmenovateli nebyla nula.

a) $y = \frac{1}{x+1}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow D(f)=R-\{-1\}$

b) $y=\dfrac{1}{2x-3}$

$2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2} \Rightarrow D(f)=R-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

c) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

$x^2+1=0$, nenastane nikdy ($x^2 \geq 0$) $\Rightarrow D(f)=R$

d) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$

$x^2-1=(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow$

- $x=1$
- $x=-1$

$\Rightarrow D(f)=R-\{\pm 1\}$

Př. 9: Urči definiční obor funkce.

a) $y=\sqrt{x-2}$ b) $y=\sqrt{2x+1}$ c) $y=\sqrt{3-x}$ d) $y=\sqrt{5-2x}$

Ve všech předpisech se vyskytuje odmocnina, kterou nemůžeme určit ze záporných čísel $\Rightarrow$ do definičního oboru zahrneme pouze čísla, pro která pod odmocninou získáme nezáporné číslo.

a) $y=\sqrt{x-2}$

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D(f)=\langle 2;\infty)$

b) $y=\sqrt{2x+1}$

$2x+1 \geq 0 \quad / -1$

$2x \geq -1 \quad / :2$

$x \geq -\dfrac{1}{2} \Rightarrow D(f)=\left\langle -\dfrac{1}{2};\infty\right)$

c) $y=\sqrt{3-x}$

$3-x \geq 0 \quad / +x$

$3 \geq x \Rightarrow D(f)=(-\infty;3\rangle$

d) $y=\sqrt{5-2x}$

$5-2x \geq 0 \quad / +2x$

$5 \geq 2x \quad / :2$

$\dfrac{5}{2} \geq x \Rightarrow D(f)=\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right\rangle$

Př. 10: Urči definiční obor funkce.

a) $y=\frac{1}{x^2-5x}$ b) $y=\frac{1}{x^2-4}$ c) $y=\frac{1}{x^2-x-12}$

Všechny funkce obsahují dělení $\Rightarrow$ hlídáme, aby ve jmenovateli nebyla nula.

a) $y=\frac{1}{x^2-5x}$

$x^2-5x=x(x-5)=0 \Rightarrow$

- $x=0$
- $x=5$

$\Rightarrow D(f)=R-\{0;5\}$

b) $y=\frac{1}{x^2-4}$

$x^2-4=(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow$

- $x=2$
- $x=-2$

$\Rightarrow D(f)=R-\{\pm 2\}$

c) $y=\frac{1}{x^2-x-12}$

$x^2-x-12=(x-4)(x+3)=0 \Rightarrow$

- $x=4$
- $x=-3$

$\Rightarrow D(f)=R-\{-3;4\}$

Shrnutí: Pokud není definiční obor u funkce dané vzorcem uveden, má se za to, že do něj patří všechna čísla, pro která můžeme hodnotu vypočítat.